数理解析研究所講究録
398巻 1980年 111-130

Which subdiagonal algebras are nonselfadjoint crossed products?

新潟大 理　斎藤 吉助

近年，subdiagonal環の構造研究は，関数環の理論の非可換版として，また，自己共役でない部分環の研究として，発展してきている．その中での中心課題の1つは不変部分空間の構造研究である．$L^2(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$：単位円) における不変部分空間の研究は，Beurlingの定理として良く知られている．それは $e^{i\theta}\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{M}$ なる L^2の不変部分空間は $qH^2(\mathbb{T})$ ($q \in L^\infty(\mathbb{T})$ で $|q|=1$ a.e.) の形にかけるということである．この一般化が，weak* Dirichlet環において，研究されている．さらに，非可換weak* Dirichlet環としてArvesonによって導入されたsubdiagonal環において，Beurling型の定理が考察された([6], [8], etc). 1977年，McAsey, Muhlyと筆者[3]において subdiagonal環の典型的な例として，非共役接合積(nonselfadjoint crossed products)の概念を導入し，Beurling型の定理が成り立つことを示した．又，[4]において，それが成り立

つための必要かつ十分条件を考察した。我々はこの講演ではこの逆を考察する。すなわち，finite maximal subdiagonal環を与えたとき，Beurling型の定理が成り立てば その subdiagonal環を決定できるか？ しかしながら，驚くべきことに，この subdiagonal環は，非共役接合積と同型になることが示される。これから，Beurling型の定理 の 研究は 非共役接合積の場合だけ意味があることがわかる。

本稿では，まず，§1で finite maximal subdiagonal環の不変部分空間の構造を示す．次に，§2で非共役接合積を定義し，Beurling型の定理の成り立つための必要十分条件を述べる．最後に，§3で finite maximal subdiagonal環がBeurling型の定理が成り立つのは非共役接合積の場合に限ることを示す。

§1. 有限極大subdiagonal 環と不変部分空間.

$\mathfrak{B}$を faithful normal tracial state ϕをもつ von Neumann環とする．$\mathfrak{B}$とϕから，Segal [9] によって，非可換Lebesgue空間 $L^p(\mathfrak{B},\phi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ を構成する．Sを $L^p(\mathfrak{B},\phi)$ の部分集合とするとき，$[S]_p$を L^pーノルム閉包とする．

定義1.1. $\mathfrak{U}$を1を含む$\mathfrak{B}$のσ-弱閉部分環とし，Φを$\mathfrak{B}$から$\mathfrak{D}(=\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}^*)$の上へのnormal expectationとする。このとき，$\mathfrak{U}$がΦとϕに関して，finite maximal subdiagonal環であるとは次の(i)—(iv)が成り立つときにいう。

i). $\mathfrak{U}+\mathfrak{U}^*$は$\mathfrak{B}$で$\sigma$-弱稠密.

ii) $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ $(\forall x, y\in\mathfrak{U})$.

iii) $\mathfrak{U}$はi)とii)をみたす$\mathfrak{B}$のσ-weakly部分環の中で極大.

(iv) $\phi\circ\Phi=\phi$.

$1\leq p<\infty$に対して，$H^p=[\mathfrak{U}]_p$，$H_0^p=[\mathfrak{U}_0]_p$ (但し，$\mathfrak{U}_0=\{x\in\mathfrak{U}:\Phi(x)=0\}$とする) とおく．この$H^p$を非可換Hardy空間と呼ぶ．この$H^p$の性質については，筆者([6],[7]) の研究がある．ここでは不変部分空間の構造を調べる．

定義1.2. $\mathfrak{M}$を$L^p(\mathfrak{B},\phi)$の閉部分空間とする．

(i) $\mathfrak{M}$が左側不変 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$.

(ii) $\mathfrak{M}$が右側不変 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{M}$.

(iii) $\mathfrak{M}$が両側不変 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$が左側かつ右側不変.

このとき，次の定理を得る．

定理1.3. $1 \le p < s \le \infty$ とする.

(1). $\mathfrak{M}$を $L^p(\mathcal{B},\phi)$ の左側(右側)不変部分空間とするならば, $\mathfrak{M}\cap L^s(\mathcal{B},\phi)$ は $L^s(\mathcal{B},\phi)$ の左側(右側)不変部分空間で $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}\cap L^s(\mathcal{B},\phi)]_p$.

(2) $\mathfrak{M}$が $L^s(\mathcal{B},\phi)$ の左側(右側)不変部分空間とするならば $[\mathfrak{M}]_p$ は $L^p(\mathcal{B},\phi)$ の左側(右側)不変部分空間で $\mathfrak{M}=[\mathfrak{M}]_p\cap L^s(\mathcal{B},\phi)$。

この定理の証明には分解定理が用いられる. すなわち, $k\in\mathcal{B}$ で $k^{-1}\in L^1(\mathcal{B},\phi)$ とするならば $k = u_1a_1 = a_2u_2$, $a_1^{-1}, a_2^{-1} \in H^2$ をみたす $a_1, a_2 \in H$ と (unitary element) $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$ が存在する ([7, Proposition 1]). 又, この定理から $L^p(\mathcal{B},\phi)$ と $L^s(\mathcal{B},\phi)$ の不変部分空間は1-1対応がつくことがわかる. これから, 不変部分空間については $L^2(\mathcal{B},\phi)$ の場合だけに限定して示せばよいことがわかる。

§2. 非共役接合積.

Mを faithful normal tracial state τ をもつ von Neumann環とし, Mは standard form, すなわち, Mとτに関する非可

換Lebesgue空間 $L^2(M,\tau)$ 上の left multiplication からなる von Neumann 環と同一視する．また，α を $\tau\circ\alpha=\tau$ なる M 上の $*$ automorphism とする．このとき，

命題2.1. $L_0^2=\{f:\mathbb{Z}\to M \mid f(n)=0$（有限個以外の n に対して）$\}$ とおく．point addition と scalar 乗法とさらに次の(1)−(3)の演算に関して，L_0^2 は Hilbert algebra になる．しかも，$\psi(0)=I_M$，$\psi(n)=0$ $(n\neq 0)$ によって定義された ψ は L_0^2 の単位元になる。

(1) $(f*g)(n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\alpha^k(g(n-k))$,

(2) $(f^*)(n)=[\alpha^n(f(-n))]^*$,

(3) $(f,g)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(f(k),g(k))_{L^2(M,\tau)}$.

このとき，簡単に L_0^2 の Hilbert 空間の完備化 L^2 は，正確に，

$$\{f:\mathbb{Z}\to L^2(M,\tau) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|f(n)\|^2_{L^2(M,\tau)}<\infty\}$$

と一致する．しかも，$l^2(\mathbb{Z})\otimes L^2(M,\tau)$ と同一視できる．$f\in L_0^2$ に対して，$L_f g=f*g$，$R_f g=g*f$ $(g\in L^2)$ によって，L^2 の operator L_f，R_f を定義する．このとき，$\mathcal{L}=\{L_f : f\in L_0^2\}''$，$\mathcal{R}=\{R_f : f\in L_0^2\}''$ とおく．また，L^∞ をすべての L^2 の bounded elements の集合とすると L^∞ は achieved Hilbert algebra になる．すなわち，L^∞ は $g\mapsto f*g$ $(g\in L_0^2)$ が L^2 の bounded operator に拡張できる L^2 の元 f からなる。このような f に対して，また，L_f, R_f とかく。このとき，Hilbert algebra の理論(cf [2, chapter 1, §5]) から，$\mathcal{L} = \{L_f : f \in L^\infty\}$ かつ，$\mathcal{R} = \{R_f : f \in L^\infty\}$。$\tau \circ \alpha = \tau$ であるから，α は $L^2(M, \tau)$ 上の unitary operator に一意に拡張できる。また，L^2_0 の $*$-operation を拡張して L^2 上の canonical antiunitary involution J は命題2.1(2) から得られる。

M は $\{x\psi : x \in M\}$ と同一視でき，$L_{x\psi}$, $R_{x\psi}$ をそれぞれ L_x, R_x とかくことにする。そこで $L(M) = \{L_x : x \in M\}$, $R(M) = \{R_x : x \in M\}$ とおく。もっと一般に S を L^∞ の部分集合とすると $L(S) = \{L_\sigma : \sigma \in S\}$, $R(S) = \{R_\sigma : \sigma \in S\}$ とかく。また，$\delta(1) = I_M$, $\delta(n) = 0$ $(n \neq 1)$ によって δ を定義する。このとき，明らかに $\mathcal{L} = \{L(M), L_\delta\}''$, $\mathcal{R} = \{R(M), R_\delta\}''$ が成り立つ。また，L^2_0 は単位元 ψ をもつから，$\mathcal{L}$ は finite von Neumann algebra で $\phi(L_f) = (f, \psi) = \tau(f(0))$, $f \in L^\infty$ とすると ϕ は $\mathcal{L}$ 上の faithful normal tracial state になる。このとき，$L^2 = L^2(\mathcal{L}, \phi)$ $L^\infty = L^\infty(\mathcal{L}, \phi)$ と同一視できる。さらに，$(W_t f)(n) = e^{2\pi i n t} f(n)$, $f \in L^2$ によって unitary 群 $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を定義し，$\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\beta_t(L_f) = W_t L_f W_t^*$ $(\beta_t(R_f) = W_t R_f W_t^*)$ と定義すると $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{L}$ $(\mathcal{R})$ 上の periodic automorphism group になる。このとき，

$$\mathcal{E}_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \beta_t \, dt$$

と定義する．$\mathcal{E}_n$ は σ-弱連続な linear map で，特に $\mathcal{E}_0$ は ϕ を preserve する $\mathcal{L}$ から $L(M)$ の $\mathcal{I}$ への faithful normal expectation になる．

次に，$H^2 = \{ f \in L^2 : f(n) = 0 \ (n < 0) \}$，$H^\infty = L^\infty \cap H^2$ と定義する．この H^∞ を M と α による非可換解析的交叉積と呼ぶ．また $\mathcal{L}_+ = \{ L_f : f \in H^\infty \}$，$\mathcal{R}_+ = \{ R_f : f \in H^\infty \}$ とおく．このとき，

定理2.2. $\mathcal{L}_+$ (resp. $\mathcal{R}_+$) は $\mathcal{E}_0$ と ϕ に関して finite maximal subdiagonal 環になる．また，$\mathcal{L}_+$ (resp. $\mathcal{R}_+$) は L_δ と $L(M)$ (resp. R_δ と $R(M)$) によって生成された $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) の σ-弱閉部分環である．

定義 2.3. $\mathcal{M}$ を L^2 の閉部分空間とする．

(1) $\mathcal{M}$ が左側不変 $\iff$ $\mathcal{L}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}$ が右側不変 $\iff$ $\mathcal{R}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{M}$ が両側不変 $\iff$ $(\mathcal{L}_+ + \mathcal{R}_+) \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

(4) $\mathcal{M}$ が pure $\iff$ $\bigcap_{n \geq 0} L_\delta^n \mathcal{M} = \{0\}$

(5) $\mathcal{M}$ が full $\iff$ $\bigvee_{n < 0} L_\delta^n \mathcal{M}$ が L^2 で稠密.

我々は Beurling 型の定理が成り立つとは L^2 のすべての pure で左側不変部分空間 $\mathcal{M}$ は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) の形

にかけるときにいう。この節での目的は Bearling 型の定理が成り立つための必要十分条件を求めることである。[3]におけるように，M が factor ならば Bearling 型の定理は成り立つ。しかしながら，その逆は必ずしも成り立たない。$\mathfrak{Z}(M)$ を M の中心，$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ (resp. $\mathfrak{Z}(\mathcal{R})$) を $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) の中心とする。今 $C=\{z\in\mathfrak{Z}(M):\alpha(z)=z\}$ とおく。このとき，次の補助定理を得る。

補助定理 2.4. (1) $\forall z\in C$ に対して，$L_z=R_z$.
(2) $\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap L(M)=\mathfrak{Z}(\mathcal{R})\cap R(M)=L(C)$.

まず，次の定理を得る。

定理 2.5. 次の3つの条件は同値。
(1). α は M の中心 $\mathfrak{Z}(M)$ 上で自明，すなわち，$\alpha(z)=z$ $(\forall z\in\mathfrak{Z}(M))$.
(2). L^2 のすべての pure な左側不変部分空間は R_VH^2 (V は L^∞ の partial isometry) の形にかける。
(3) H^2 のすべての左側不変部分空間は R_VH^2 (V は L^∞ の partial isometry) の形にかける。

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2). α は $\mathfrak{Z}(M)$ 上自明とする。$\mathfrak{M}$ を L^2 の pure な左

側不変部分空間，P を L^2 から $\mathfrak{M} \ominus L_z\mathfrak{M}$ の上への projection，P_0 を L^2 から $H^2 \ominus L_z H^2$ の上への projection とする．このとき，[3, Theorem 3.2] から，P，$P_0 \in L(M)'$．射影作用素の比較定理 (cf. [2, P218, Théorème 1]) から，$L_z P \prec L_z P_0$ かつ $(1-L_z)P \succ (1-L_z)P_0$ をみたす $\mathfrak{Z}(M)$ の射影作用素 z が存在する．補助定理 2.4 から，$L_z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) \cap L(M)$．$L_z\mathfrak{M}$ と $L_z H^2$ はともに L^2 の pure な左側不変部分空間であるから，[3, Theorem 3.2] によって $L_z\mathfrak{M} = R_{V_1} L_z H^2$ をみたす $\mathfrak{R}$ の partial isometry R_{V_1} がある．同様に，$(1-L_z)H^2 = R_{V_2}(1-L_z)\mathfrak{M}$ をみたす $\mathfrak{R}$ の partial isometry R_{V_2} がある．H^2 が pure であるから $R_{V_2}^* R_{V_2} = R_{V_2} R_{V_2}^* = 1-L_z$．そこで，$R_V = R_{V_1} L_z \oplus R_{V_2}^*(1-L_z)$ とおくと，$\mathfrak{M} = R_V H^2$ を得る．

(2) ⟹ (3)．明らか．

(3) ⟹ (1)．α が $\mathfrak{Z}(M)$ 上で自明でないとする．このとき，$\alpha(e)e = 0$ をみたす零でない M の projection e がある．$\mathfrak{M} = \{f \in H^2 : e f(0) = f(0)\}$ とおくと $\mathfrak{M}$ は容易に，pure, full な左側不変部分空間で $L_e L_\delta^* \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ をみたす．$\mathfrak{M} = R_V H^2$ の形にかけたとすると，$\mathfrak{M}$ は full から R_V は unitary operator になる．したがって，

$$L_e L_\delta^* H^2 = L_e L_\delta^* R_V^* \mathfrak{M} = R_V^* L_e L_\delta^* \mathfrak{M} \subseteq R_V^* \mathfrak{M} = H^2$$

したがって，$L_e L_\delta^* \in \mathfrak{L}_+$．これは矛盾．

次に，Beurling 型の定理が成り立つことと，$\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の σ-弱閉部分環の形の決定，また，L^2 の pure な両側不変部分空間の形の決定は次のように結びつく.

定理2.6. 次の条件は定理2.5の各条件と同値である.

(4) もし $\mathcal{B}$ が $\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の σ-弱閉部分環とするならば，$\mathcal{B} = (1-L_e)\mathcal{L} \oplus L_e\mathcal{L}_+$ をみたす $\mathcal{C}$ の射影作用素 e がある.

(5) もし $\mathfrak{M}$ が H^2 の両側不変部分空間ならば，$\mathfrak{M}$ は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in \mathcal{C}$) の形にかける.

証明. (2) ⟹ (5). $\mathfrak{M}$ を H^2 の両側不変部分空間とする. 定理2.5から，$\mathfrak{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) の形にかける. もし，$e = V^*V$ とすると [3, Proposition 4.5] の証明のように，$R_e \in \mathfrak{Z}(\mathcal{R}) \cap R(M) = L(\mathfrak{Z}(M)) = L(C)$. $L_e = R_e$ であるから，$\mathfrak{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) が成り立つ.

(5) ⟹ (4). $\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の σ-弱閉部分環とするならば，このとき，$[\mathcal{B}4]_2$ は L^2 の両側不変部分空間である. [3, Corollary 1.5] から $K = L^2 \ominus [\mathcal{B}4]_2 \neq \{0\}$ で JK は H^2 の両側不変部分空間であるから，$JK = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) の形にかける. $e = V^*V$ とおくと，これと定理1.3を用いることにより，$\mathcal{B} = (1-L_e)\mathcal{L} \oplus L_e\mathcal{L}_+$ が

示せる。

(4)⇒(1)．αが$\mathfrak{Z}(M)$上自明でないとする。定理2.5の(3)⇒(1)の証明と同様に，H^2のpureなfullで左側不変部分空間$\mathfrak{M}$をつくる。$\mathfrak{B}$を$L_e L_g^*$と$\mathfrak{L}_+$によって生成された$\mathfrak{L}$のσ-弱閉部分環とすると，$\mathfrak{L}_+ \subsetneqq \mathfrak{B} \subsetneqq \mathfrak{L}$が示せる。仮定から，$\mathfrak{B}=(1-L_p)\mathfrak{L} \oplus L_p\mathfrak{L}_+$（$P$は$\mathcal{C}$のprojectionで$0<P<1$）の形にかける。$L_p\mathfrak{B}=L_p\mathfrak{L}_+$より，$L_pL_eL_g^* \in L_p\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_+$でかつ$L_pL_eL_g^*=0$。したがって，$(1-L_p)\mathfrak{L}$は$L_eL_g^*$と$(1-L_p)\mathfrak{L}_+$によって生成された$\sigma$-弱閉部分環である。$(1-L_p)L_g^2 \in (1-L_p)\mathfrak{B}$で$((1-L_p)L_eL_g^*)^2=0$であるからこれは矛盾。

次に，定理2.6の条件(5)を弱めたものを考えるが，実際，それは同値になる。

命題2.7．次の条件は定理2.5，2.6の(1)−(5)と同値。

(6)．もし$\mathfrak{M}$がL^2のpureな両側不変部分空間とするならば，$\mathfrak{M}$はR_VH^2（VはL^∞のpartial isometryで$V^*V=VV^*\in\mathcal{C}$）の形にかける

証明．(6)⇒(5)は明らか。

(1)⇒(6)．$\mathfrak{M}$をL^2のpureな両側不変部分空間とすると，定理2.5から$\mathfrak{M}=R_VH^2$（VはL^∞のpartial isometry）の形にかけ

//

る。$e = V^*V$ とすると $R_e = R_V R_V^*$ で $R_e L^2 = R_V L^2 = R_V(\bigvee_{n\le 0} L_\delta^n H^2)$ $= \bigvee_{n\le 0} L_\delta^n R_V H^2 = \bigvee_{n\le 0} L_\delta^n \mathfrak{M}$ は両側不変部分空間であるから、[3, Corollary 4.4] から $e \in \mathfrak{Z}(L^\infty)$。$L^\infty$ は finite 故、$VV^* = e$。$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{L} : x\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}\}$ とおくと $\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の固有な σ-弱閉部分環であることは明らか。定理2.6 から、$\mathcal{B} = (1-L_p)\mathcal{L} \oplus L_p\mathcal{L}_+$ (p は C の projection) の形にかける。$(1-L_p)\mathfrak{M}$ は $\mathcal{L}$-不変で $(1-L_p)\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ であるから、$(1-L_p)\mathfrak{M} = \{0\}$。そこで、$R_{1-p} R_e L^2 = L_{1-p} R_e L^2 = \bigvee_{n\le 0} L_\delta^n L_{1-p}\mathfrak{M} = \{0\}$。したがって、$(1-p)e = 0$。$R_e \in \mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ 故 $R_e = L_e$。そこで $L_e\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ であるから、$L_e \in \mathcal{B}$。したがって $L_e = L_e L_p \in L_p\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$。これから、$L_e \in \mathfrak{Z}(\mathcal{L}) \cap L(M) = L(C)$。//

定理 2.5, 2.6と命題2.7において、factor の reduction theory を用いていない。したがって、[3] の結果を形[illegible]て得る。

系 2.8. 次の条件は同値。

(1) M は factor である。

(2) $C = \{\mathbb{C}1\}$ で L^2 の各 pure な左側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) にかける。

(3) $C=\{\mathbb{C}1\}$ で H^2 の各左側不変部分空間は R_vH^2 (v は $\mathcal{L}^\infty$ の partial isometry) の形にかける.

(4) $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{L}$ の maximal σ-weakly closed subalgebra である.

(5) もし $\mathfrak{M}$ が H^2 の両側不変部分空間とするならば, $\mathfrak{M}=R_vH^2$ (v は $\mathcal{L}^\infty$ の unitary operator) にかける.

(6) もし $\mathfrak{M}$ が L^2 の両側不変部分空間で $\mathcal{L}\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}$ ならば, $\mathfrak{M}=R_vH^2$ (v は $\mathcal{L}^\infty$ の unitary operator) の形にかける.

§3. Which subdiagonal algebras are crossed products?

非共役接合積において Beurling 型の定理が成りたつのは驚くべきことであり, また, それは強い結果である. 一般の finite maximal subdiagonal 環において, 不変部分空間の形を決定する問題は非常に興味のある問題であるが, 又, Beurling 型の定理が成り立つ finite maximal subdiagonal 環は何かという問題が生じてくる. ここでは, このような subdiagonal 環は非共役接合積以外にないことを示す. §1 の記号をここではそのまま用いることにする. $\mathcal{B}$ を faithful normal tracial state でもつ von Neumann algebra で $\mathfrak{U}$ を finite maximal subdiagonal algebra とする. $D=\mathfrak{U}\cap\mathfrak{U}^*$ とおく. また, $x\in\mathcal{B}$ とするとき

$L_x f = xf$, $R_x f = fx$ ($f \in L^2(\mathcal{B}, \phi)$) によって, L_x, R_x を定義する. このとき, $\mathcal{L} = \{L_x : x \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R} = \{R_x ; x \in \mathcal{B}\}$ とおくと, $\mathcal{B}$ は finite achived Hilbert algebra で $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は $\mathcal{B}$ のそれぞれ left, right von Neumann 環である. また, $\mathcal{L}_+ = \{L_x : x \in \mathfrak{A}\}$ ($\mathcal{R}_+ = \{R_x : x \in \mathfrak{A}\}$) とおく.

[3]において, H^2 のあらゆる零でない両側不変部分空間は VH^2 (V は $\mathcal{B}$ の unitary operator) の形にかけるとするならば, $\phi\circ\alpha = \phi$ なる D の *-automorphism が存在して, $\mathcal{B}$ は D と α による接合積に同型でこの対応で $\mathfrak{A}$ は H^∞ と同型になる. さらに D が factor になることが示された. ここでは, 少し緩い条件で考える. $C = \mathfrak{Z}(\mathcal{B}) \cap D$ とおくと明らかに, $C \subset \mathfrak{Z}(D)$ である.

定義3.1. $\mathfrak{A}$ を Φ と ϕ に関する finite maximal subdiagonal 環とする. このとき, $\mathfrak{A}$ が pure とは $\mathfrak{A}P = \mathcal{B}P$ なる C の零でない projection P が存在しないときをいう.

一般に, $\mathfrak{A}$ が finite maximal subdiagonal 環とすると $\mathfrak{A}$ はいつも pure ではない. 例えば $\mathcal{B} = L^\infty(T) \oplus L^\infty(T)$ とする. $\mathfrak{A} = H^\infty(T) \oplus L^\infty(T)$, $\Phi(f \oplus g) = (\int f\,dm) \oplus g$, $(f, g \in L^\infty(T))$ とおくと, $\mathfrak{A}$ は Φ に関する finite maximal subdiagonal 環であるが pure でない.

定理3.2. H^2のあらゆる両側不変部分空間はR_vH^2 (vは$\mathfrak{B}$のpartial isometryで$v^*v = vv^* \in \mathcal{C}$)の形にかけるとする. $\mathfrak{U}$がpureならば, $\phi \circ \alpha = \phi$をみたす$\mathfrak{D}$の*-automorphism αが存在して次の性質(*)をもつ.

(*) $\mathfrak{B}$は$\mathfrak{D}$とαによる接合積に同型で$\mathfrak{U}$はH^∞に対応する.

これと定理2.5, 2.6から次の系を得る.

系3.3. (1) $\mathcal{C} = \{z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{D}) : \alpha(z) = z\}$.

(2) αは$\mathfrak{Z}(\mathfrak{D})$上で自明.

(3) H^2のすべての左側不変部分空間はR_vH^2 (vは$\mathfrak{B}$のpartial isometry)の形にかける.

定理3.2を証明するために, いくつかの補助定理を必要とする. 今H^2のすべての両側不変部分空間はR_vH^2 (vは$\mathfrak{B}$のpartial isometryで$v^*v = vv^* \in \mathcal{C}$)の形にかけ, $\mathfrak{U}$はpureと仮定する.

補助定理3.4. $H_0^2 = R_vH^2$となる$\mathfrak{B}$のunitary operator vが存在する.

証明. H_0^2はH^2の両側不変部分空間で$H_0^2 \neq \{0\}$より $H_0^2 = R_vH^2$

(V は $\mathcal{B}$ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in \mathcal{C}$) の形にかける。$V^*V = 1-P$ とおくと，このとき，$\forall y \in H_0^2$，$\forall x \in \mathcal{B}$ に対して，$\phi(PxPy) = 0$．したがって [1, Corollary 2.2.4] から，$\mathcal{B}P = \mathcal{U}P$．$\mathcal{U}$ が pure 故 $P = 0$．従って，V は unitary operator になる．//

補助定理3.5．V が $R_V H^2 = H_0^2$ なる $\mathcal{B}$ の unitary operator ならば，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$R_V^n H^2 = L_V^n H^2$．

証明．$H^2 = L^2 \ominus JH_0^2 = L^2 \ominus JR_V H^2 = L^2 \ominus L_V^* JH^2 = L_V^*(L^2 \ominus JH^2)$ $= L_V^* H_0^2$．そこで，$R_V H^2 = H_0^2 = L_V H^2$．$n \geq 1$ で $R_V^n H^2 = L_V^n H^2$ ならば，$R_V^{n+1} H^2 = R_V(R_V^n H^2) = R_V(L_V^n H^2) = L_V^n(R_V H^2) = L_V^n(L_V H^2)$ $= L_V^{n+1} H^2$．したがって，$\forall n \geq 0$ に対して，$L_V^n H^2 = R_V^n H^2$．しかし，$n < 0$ ならば，$R_V^{*n} H_0^2 = R_V^{*n-1} H^2 = L_V^{*(n-1)} H^2 = L_V^{*n} H_0^2$．よって，$R_V^n H^2 = J^2 R_V^n H^2 = J(L_V^{*n}(JH^2)) = J(L_V^{*n}(L^2 \ominus H_0^2))$ $= J(L^2 \ominus L_V^{*n} H_0^2) = J(L^2 \ominus R_V^{*n} H_0^2) = J(R_V^{*n}(JH^2)) = L_V^n H^2$．よってすべての n に対して成り立つ．

補助定理3.6．もし $\mathcal{J}$ が $\mathcal{U} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{B}$ なる σ-弱閉部分環とするならば，$\mathcal{J} = (1-P)\mathcal{B} \oplus P\mathcal{U}$ をみたす projection $P \in \mathcal{C}$ がある．

証明．定理1.3によって，$K = L^2 \ominus [\mathcal{J}]_2 \neq \{0\}$．このとき，

JK は H^2 の両側不変部分空間である．仮定から $JK = R_W H^2$ (W は $\mathfrak{B}$ の partial isometry で $W^*W = WW^* \in \mathfrak{C}$) の形にかける．定理 2.6 (5)$\Rightarrow$(4) の証明のように，$\mathfrak{J} = (1-P)\mathfrak{B} \oplus P\mathfrak{U}$ ($P = W^*W$) が成り立つ．

補助定理 3.7．V を $H^2_0 = R_V H^2$ なる $\mathfrak{B}$ の unitary operator とする．このとき，$V\mathfrak{D}V^* = \mathfrak{D}$．

証明．補助定理 3.5 から，$H^2_0 = L_V H^2$ で $L(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{L}_+$ から，$L_V^* L(\mathfrak{D}) L_V H^2 \subset H^2$．したがって，$L_V^* L(\mathfrak{D}) L_V \subset \mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{L}_+^* = L(\mathfrak{D})$．一方，$V\mathfrak{D}V^* H^2_0 \subset H^2_0$ であるから，$V\mathfrak{D}V^* \subset \mathfrak{B} \cap H^2 = \mathfrak{U}$．$V\mathfrak{D}V^* \subset \mathfrak{D}$．したがって，$V\mathfrak{D}V^* = \mathfrak{D}$．

定理 3.2 の証明．$\forall d \in \mathfrak{D}$ に対して $\alpha(d) = VdV^*$ によって $\mathfrak{D}$ の $*$-automorphism α を定義する．このとき，明らかに，$\phi \circ \alpha = \phi$ である．$\tilde{\mathfrak{B}}$ を $\mathfrak{D}$ と V によって生成された部分環とする ($\tilde{\mathfrak{B}}$ は単に $\mathfrak{D} \cup \{V^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の有限個の積の一次結合からなるものとする)．$\tilde{\mathfrak{B}}$ は $\mathfrak{B}$ の sub Hilbert algebra になる．L^2_0 を §2 におけるように，$\mathfrak{D}$ と α による Hilbert 環とする．$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k V^k \in \tilde{\mathfrak{B}}$ に対して $f \in L^2_0$ ($f(k) = d_k$) を対応させる．この対応を W とする．このとき，W は well-defined で isometric であることを示そう．まず，$L^n_0[\mathfrak{D}]_2 \subseteq H^2_0 \subseteq [\mathfrak{D}]^{\perp}_2$ ($\forall n \geqq 0$)

であるから, $[\mathfrak{D}]_2$ は L_V に対する wandering subspace である.
今, $x=\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k V^k \in \mathfrak{B}$ の Hilbert space norm は $\|x\|^2=\phi(x^*x)$ であるから

$$\|x\|^2 = \sum_k\sum_l \phi(V^{*l} d_l^* d_k V^k) = \sum_k\sum_l \phi(V^{k-l} d_l^* d_k)$$
$$= \sum_k \phi(d_k^* d_k) = \sum_k \|d_k\|^2 = \|Wx\|^2$$

したがって W は well-defined で isometric である. さらに, W は $\mathfrak{B}$ から L_0^2 の上への Hilbert algebra isomorphism であることが示せる. 証明を完全にするために, $[\mathfrak{B}]_2=L^2$ で $\sum_{n=0}^{\infty} L_V^n[\mathfrak{D}]_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [V^n\mathfrak{D}]_2 = H^2$ であることを示せばよい. そのために, まず, $\mathfrak{M}=\bigcap_{n\geq 0} L_V^n H^2=\{0\}$ を示そう. $\mathfrak{M}\subset H^2$ であるから, もしも $\mathfrak{M}\neq\{0\}$ ならば $L_{\mathfrak{A}}\mathfrak{M}\subsetneqq\mathfrak{M}$. そこで, もし $\mathfrak{M}\neq\{0\}$ ならば, $\mathfrak{J}=\{x\in\mathfrak{B}: L_x\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}\}\subsetneqq\mathfrak{B}$ とする. 補助定理 3.6 によって, $\mathfrak{J}=(1-p)\mathfrak{B}\oplus p\mathfrak{A}$ なる projection $p\in\mathfrak{C}$ がある. しかし $L_V^*\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ 故, $V^*\in\mathfrak{J}$. そこで, $pV^*\in p\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}$. 一方, $H_0^2=L_VH^2$ より, $pV\in\mathfrak{A}_0$. これから, $pV=0$. V は unitary 故 $p=0$. したがって, $\mathfrak{J}=\mathfrak{B}$. これは矛盾. よって, $H^2=\sum_{n=0}^{\infty} L_V^n[\mathfrak{D}]_2$. さらに, $L^2=H^2\oplus JH_0^2$ であるから, $[\mathfrak{B}]_2=L^2$. //

H^2 のすべての零でない両側不変部分空間が R_VH^2 (V は $\mathfrak{B}$ の unitary operator) の形にかけるとする. このとき, 明らか

かに, $C = \{\mathbb{C}1\}$ であるから $\mathcal{U}$ はいつも pure になる. したがって, 定理3.2から [3] の Theorem 6.1 を系として得る。

References

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.

[2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[3] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.

[4] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products II, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.

[6] K. -S. Saito, On noncommutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J.

29(1977), 585-595.

[7] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 348-352.

[8] K. -S. Saito, Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Pacific J. Math.

[9] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., 57(1953), 401-457.